2014 年河北省大学生高等数学竞赛答案

一、　（本题满分 13 分）已知函数 $f(\mathrm{x})$ 满足 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left[1+\dfrac{f(\mathrm{x})}{1-\cos x}\right]}{2^x-1}=4$，求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(\mathrm{x})}{x^3}$.

解：由

$$\lim_{x\to 0}\ln\left[1+\frac{f(\mathrm{x})}{1-\cos x}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left[1+\frac{f(\mathrm{x})}{1-\cos x}\right]}{2^x-1}\bullet\lim_{x\to 0}(2^x-1)=4\bullet 0=0$$

推出 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(\mathrm{x})}{1-\cos x}=0$ …………6 分

所以

$$4=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left[1+\frac{f(\mathrm{x})}{1-\cos x}\right]}{2^x-1}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{f(\mathrm{x})}{1-\cos x}}{x\ln 2}=\lim_{x\to 0}\frac{f(\mathrm{x})}{(1-\cos x)\bullet x\ln 2}=\lim_{x\to 0}\frac{f(\mathrm{x})}{\frac{1}{2}x^2\bullet x\ln 2}=\frac{2}{\ln 2}\lim_{x\to 0}\frac{f(\mathrm{x})}{x^3}$$

因此，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(\mathrm{x})}{x^3}=2\ln 2$. …………13 分

二、　（本题满分 16 分）设数列 $\{\mathrm{x}_n\}$ 定义如下：

$$\mathrm{x}_0=7,\mathrm{x}_1=3,\ 3x_n=2x_{n-1}+x_{n-2}(\mathrm{n}=2,3,\cdots).$$

1. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$；

2. 记上述极限的值为 a，求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}n^2\left(\dfrac{a}{8}\right)^n$ 的和.

解：1. 由所给递推式得

$$x_n-x_{n-1}=\left(-\frac{1}{3}\right)^1(x_{n-1}-x_{n-2})=\left(-\frac{1}{3}\right)^2(x_{n-2}-x_{n-3})=\cdots=\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}(x_1-x_0)$$

$$=\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}(3-7)=12\left(-\frac{1}{3}\right)^n$$

所以，$x_n=\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-x_{i-1})+x_0=\sum\limits_{i=1}^{n}12\left(-\dfrac{1}{3}\right)^i+7$

从而，$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}12\left(-\frac{1}{3}\right)^n+7=12\times\dfrac{-\frac{1}{3}}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)}+7=4$.　　　　…………8 分

2. 考虑幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}n^2x^n$，它的收敛区间为 $(-1,1)$ (显然 $\frac{a}{8}=\frac{1}{2}\in(-1,1)$). 在 $(-1,1)$ 内，

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}n^2x^n &= x^2\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}n(\mathrm{n}-1)x^{n-2}+x\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}nx^{n-1} \\
&= -x^2\sum_{n=2}^{\infty}[(-\mathrm{x})^n]''-\mathrm{x}\sum_{n=1}^{\infty}[(-\mathrm{x})^n]' \\
&= -x^2\left[\sum_{n=2}^{\infty}(-\mathrm{x})^n\right]''-\mathrm{x}\left[\sum_{n=1}^{\infty}(-\mathrm{x})^n\right]' \\
&= -x^2\left(\frac{x^2}{1+x}\right)''-\mathrm{x}\left(\frac{-x}{1+x}\right)' \\
&= -\frac{2x^2}{(1+x)^3}+\frac{x}{(1+x)^2}=\frac{-x^2+x}{(1+x)^3}
\end{aligned}
$$

所以，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}n^2\left(\frac{a}{8}\right)^n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}n^2\left(\frac{1}{2}\right)^n=-\dfrac{3x^2+x}{(1+\mathrm{x})^3}\Bigg|_{x=\frac{1}{2}}=\dfrac{2}{27}$.　………16 分

三、　（本题满分 13 分）证明：方程 $xe^{2x}-2x-\cos x+\frac{1}{2}x^2=0$ 在 $[-1,1]$ 上有且仅有两个实根.

解： 记 $f(\mathrm{x})=xe^{2x}-2x-\cos x+\frac{1}{2}x^2$，则 $f(\mathrm{x})$ 是连续函数，且

$$f(-1)=-e^{-2}+2-\cos1+\frac{1}{2}>0,\ f(0)=-1<0,\ f(1)=e^2-2-\cos1+\frac{1}{2}>0$$

所以，由连续函数零点定理知方程 $f(\mathrm{x})=0$ 在 $(-1,1)$ 内有两个实根 x_1,x_2.　　　　…………6 分

如果在 $(-1,1)$ 内方程 $f(\mathrm{x})=0$ 还有不同于 x_1,x_2 的根 x_3，不妨设 $x_1<x_2<x_3$，则 $f(x_1)=f(x_2)=f(x_3)$.由于 $f(\mathrm{x})$ 二阶可导，所以，存在 $\xi\in(x_1,x_3)$，使得

$$f''(\xi)=0 \tag{1}$$

另一方面，由 $f'(\mathrm{x})=e^{2x}(1+2\mathrm{x})-2+\mathrm{sinx}+\mathrm{x}$ 得 $f''(\mathrm{x})=4e^{2x}(1+\mathrm{x})+\cos x+1>0$，所

以

$$f''(\xi)=4e^{2\xi}(1+\xi)+\cos\xi+1>0 \qquad (2)$$

式(1)与式(2)矛盾！知 x_3 不存在.

由此证明了方程 $f(x)=0$ 在 $[-1,1]$ 上有且仅有两个实根. …………13 分

四、（本题满分 13 分）设 $f(x),g(x)$ 在 $[0,1]$ 上有连续导数，且 $f(0)=0, f'(x)\ge 0, g'(x)\ge 0$，证明：对任意 $a\in[0,1]$ 有 $\int_0^a g(x)f'(x)dx+\int_0^1 f(x)g'(x)dx\ge f(a)g(1)$.

解：记 $F(x)=\int_0^x g(t)f'(t)dt+\int_0^1 f(t)g'(t)dt-f(x)g(1)$，则 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导，且 $F'(x)=g(x)f'(x)-f'(x)g(1)=f'(x)[g(x)-g(1)]\le 0$（这里利用题设 $f'(x)\ge 0, g'(x)\ge 0$）. …………6 分

所以对于任意 $a\in[0,1]$ 有

$$\begin{aligned}F(a)\ge F(1)&=\int_0^1 g(t)f'(t)dt+\int_0^1 f(t)g'(t)dt-f(1)g(1)\\&=\int_0^1 d[f(t)g(t)]-f(1)g(1)=f(1)g(1)-f(0)g(0)-f(1)g(1)=0\end{aligned}$$

即

$$\int_0^a g(x)f'(x)dx+\int_0^1 f(x)g'(x)dx\ge f(a)g(1)$$ …………13 分

五、（本题满分 16 分）某公司通过电视和报纸两种形式作广告，已知销售 R(万元)与电视广告费 x(万元)、报纸广告费 y(万元)有如下关系：

$$R(x,y)=13+15x+33y-8xy-2x^2-10y^2.$$

1. 在广告费不限的条件下，求最佳广告策略及获取的利润；
2. 如果提供的广告费用是 2 万元，求相应的最佳广告策略及获取的利润.

解：利润函数为

$$L(x,y)=R(x,y)-(x+y)=13+14x+32y-8xy-2x^2-10y^2\ (x\ge 0, y\ge 0)$$

1. $\dfrac{\partial L(x,y)}{\partial x}=14-8y-4x,\ \dfrac{\partial L(x,y)}{\partial y}=32-8x-20y$

解方程组$\begin{cases}\dfrac{\partial L}{\partial x}=0\\ \dfrac{\partial L}{\partial y}=0\end{cases}$得唯一驻点$(1.5,1)$. 由问题的实际意义知$L$在$x\geq 0, y\geq 0$时

存在最大值，所以L的最大值$L(1.5,1)=39.5$，即电视广告费和报纸广告费分别为 1.5 万元与 1 万元为最佳广告策略，获取的利润为 39.5 万元. …………8 分

2. 本小题是在$x+y=2$的条件下，计算$L(x,y)$的最大值，因此用拉格朗日乘数法. 记拉格朗日函数：

$$F(x,y)=L(x,y)+\lambda(x+y-2)=13+14x+32y-8xy-2x^2-10y^2+\lambda(x+y-2)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}=14-8y-4x+\lambda,\frac{\partial F}{\partial y}=32-8x-20y+\lambda$$

解方程组$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial x}=0\\ \dfrac{\partial F}{\partial y}=0\\ x+y=2\end{cases}$ 即$\begin{cases}14-8y-4x+\lambda=0\\ 32-8x-20y+\lambda=0\\ x+y=2\end{cases}$ 得唯一解：$x=0.75, y=1.25$

由问题的实际意义知，在$x+y=2$时，L必有最大值，所以L的最大值

$L(0.75,1.25)=39.25$， 即电视广告费和报纸广告费分别为 0.75 万元与 1.25 万元为最佳广告策略，获取的利润为 39.25 万元. …………16 分

六、（本题满分 16 分） 计算曲面积分

$$I=\iint_{\Sigma}(8y+1)xdydz+2(1-y^2)dzdx-4yzdxdy$$

其中Σ是曲线$L:\begin{cases}z=\sqrt{y-1}\\ x=0\end{cases}$ $(1\leq y\leq 3)$绕y轴旋转所成的曲面的外侧.

解 $L:\begin{cases}z=\sqrt{y-1}\\ x=0\end{cases}$ $(1\leq y\leq 3)$绕y轴旋转所成的曲面的方程为：

$\Sigma: y-1=x^2+z^2$

令$D:\begin{cases}x^2+z^2\leq 2\\ y=3\end{cases}$，其方向与$y$轴正向相同，$V$是$\Sigma$与$D$所围成的区域。

从而由高斯公式得

$$I+\iint_D (8y+1)xdydz+2(1-y^2)dzdx-4yzdxdy=\iint_V dxdydz$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2}}rdr\int_{1+r^2}^{3}dy$$

$$=2\pi$$ …………8 分

$$\iint_D (8y+1)xdydz+2(1-y^2)dzdx-4yzdxdy=\iint_{D_{zx}} 2(1-3^2)dzdx=-32\pi$$

因此 $I=\iint_\Sigma (8y+1)xdydz+2(1-y^2)dzdx-4yzdxdy$

$$=2\pi-(-32\pi)=34\pi$$ …………16 分

七、（本题满分 13 分）设两条抛物线 $y=nx^2+\frac{1}{n}, y=(\mathrm{n}+1)x^2+\frac{1}{n+1}$ 的交点横坐标的绝对值为 α_n.

1. 求这两条抛物线围成的图形的面积 S_n；

2. 已知 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$，求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{S_n^2}{\alpha_n^2}$ 的和.

解： 1. 解方程组 $\begin{cases} y=nx^2+\frac{1}{n} \\ y=(\mathrm{n}+1)x^2+\frac{1}{n+1} \end{cases}$ 得 $x=\pm\frac{1}{\sqrt{n(\mathrm{n}+1)}}$ (两抛物线交点横坐标).

于是，$\alpha_n=\frac{1}{\sqrt{n(\mathrm{n}+1)}}$. 由此可得

$$S_n=\int_{-\alpha_n}^{\alpha_n}\left\{\left(nx^2+\frac{1}{n}\right)-\left[(\mathrm{n}+1)x^2+\frac{1}{n+1}\right]\right\}dx=2\int_0^{\alpha_n}\left[-x^2+\frac{1}{n(n+1)}\right]dx=\frac{4}{3[\mathrm{n}(\mathrm{n}+1)]^{\frac{3}{2}}}$$

…………6 分

2. 由于 $\frac{S_n^2}{\alpha_n^2}=\frac{\frac{16}{9[\mathrm{n}(\mathrm{n}+1)]^3}}{\frac{1}{n(\mathrm{n}+1)}}=\frac{16}{9}\bullet\frac{1}{[\mathrm{n}(\mathrm{n}+1)]^2}$，所以

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{S_n^2}{\alpha_n^2}=\frac{16}{9}\bullet\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{[\mathrm{n(n+1)}]^2}=\frac{16}{9}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)^2$$

$$=\frac{16}{9}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^2}-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\mathrm{n}(n+1)}\right]$$

$$=\frac{16}{9}\left(2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}-1-2\right)=\frac{16}{9}\left(2\bullet\frac{\pi^2}{6}-3\right)=\frac{16}{27}\pi^2-\frac{16}{3}\quad.$$ …………13 分